به نام خدا

www.dr-haghbin.info/Courses/undergraduate/

www.LMS.dr-haghbin.info

ahaghbin@gmail.com

۱- معرفی مفاهیم پایه در آمار و احتمال

* آزمایش تصادفی — trial - Experiment

یک آزمایش تصادفی، آزمایشی است که به یکی از نتایج e_1 ، e_2 ، ... ، e_n ، ... منجر می‌شود ولی نتیجه آن از قبل مشخص نیست.

مثال ۱ - پرتاب یک تاس

وقتی یک تاس را پرتاب می‌کنیم، یکی از اعداد ۱، 2، 3، 4، 5 یا 6 را خواهیم دید.

بنابراین نتایج این آزمایش تصادفی، یکی از اعداد مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ خواهد بود.

$\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_6$

مثال 2 - پرتاب سکه

وقتی یک سکه را پرتاب می‌کنیم (آزمایش تصادفی) یکی از دو نتیجه‌ی شیر یا خط را خواهیم داشت

Head (شیر) یا H

Tail (خط) یا T

بنابراین نتیجه این آزمایش تصادفی یکی از اعضای مجموعه $\{H, T\}$ خواهد بود.

* فضای نمونه Sample Space

فضای نمونه، مجموعه‌ای است شامل تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی که آن را با Ω نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال در مثال ۱ (پرتاب تاس) داریم

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: شمارش‌پذیر و محدود

در مثال 2 (پرتاب سکه) داریم

$\Omega = \{H, T\}$: شمارش‌پذیر و محدود

* فضای نمونه می‌تواند محدود (کران‌دار) یا نامحدود (بی‌کران) باشد.
* فضای نمونه می‌تواند شمارش‌پذیر (گسسته) یا شمارش‌ناپذیر (پیوسته) باشد.

به‌طور مثال: در آزمایش تصادفی اندازه‌گیری دمای یک اتاق، نتایج حاصل در بازه $[16, 36]$ می‌باشد.

$\underbrace{[16, 36]}_{\text{محدود و شمارش‌ناپذیر}}$

یا در آزمایش انتخاب یک عدد از بین اعداد طبیعی داریم:

$\Omega = \mathbb{N}$ (نامحدود و شمارش‌پذیر)

* پیش‌آمد یا رخداد Event

منظور از یک پیش‌آمد، مجموعه‌ای از بعضی نتایج آزمایش تصادفی است که مد نظر است. به عبارت دیگر یک پیش‌آمد (E) یک زیرمجموعه از فضای نمونه است.

$$E \subseteq \Omega$$

پیش‌آمد ← E ، فضای نمونه ← Ω

به عنوان مثال در آزمایش پرتاب تاس پیش‌آمد اینکه عدد مشاهده شده ضریبی از 3 باشد:

$$E_1 = \{3, 6\}$$

یادآوری: آزمایش انتخاب یک عدد از مجموعه اعداد طبیعی، پیشامد اینکه عدد انتخاب شده کمتر از ۱۵ باشد:

$$E_2 = \{1, 2, \ldots, 9\}$$

یکی از مسائل مهم در بحث احتمالات، این است که بتوانیم به هر پیشامدی، یک عدد بین صفر و یک به عنوان احتمال نسبت بدهیم. در واقع احتمال، تابعی است که به هر پیشامد، یک عدد بین صفر و یک نسبت می دهد. همان طور که گفتیم هر پیشامد، یک زیرمجموعه از فضای نمونه S است، بنابراین برای بررسی پیشامدها، لازم است که مطالبی را در مورد مجموعه‌ها، یادآوری کنیم.

* یادآوری از نظریه مجموعه‌ها

- یک مجموعه (set) گروهی از اعضا یا اشیا است.

به عنوان مثال،

$A = \{1, \alpha, -3, 2.2\}$: شمارش‌پذیر محدود

$B = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$: شمارش‌پذیر و نامحدود

$C = [-3, 2]$: شمارش‌ناپذیر محدود

* به هر یک از اعضای یک مجموعه یک عضو یا یک عنصر (Element) می‌گوییم.

* مجموعه‌ی A را زیرمجموعه B می‌گوییم اگر هر عضو A، عضوی از B نیز باشد.

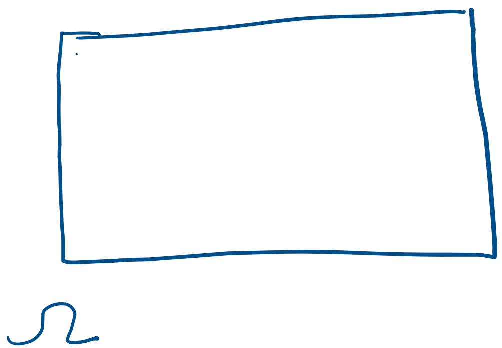
$$A \subseteq B$$

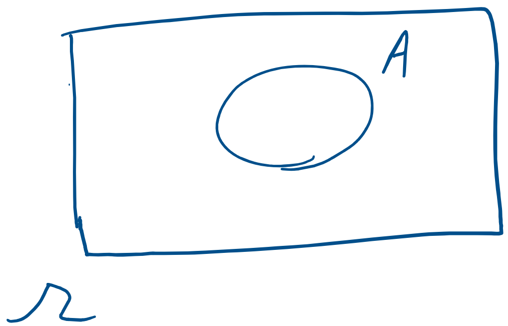
* دو مجموعه‌ی A و B را مساوی می‌گوییم، اگر اعضای آنها یکسان باشند یا

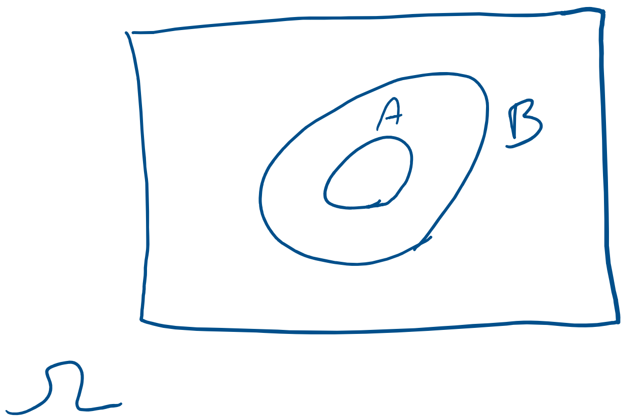
$$A \subset B \quad , \quad B \subset A \quad \Longrightarrow \quad A = B$$

- مجموعه تمامی المان های ممکن در فضای تجربه ها را با مجموعه مرجع Ω نمایش می دهیم.
- در بحث مجموعه ها، برای درک بهتر مفاهیم از دیاگرام ون نیز کمک می گیریم.

Venn Diagram







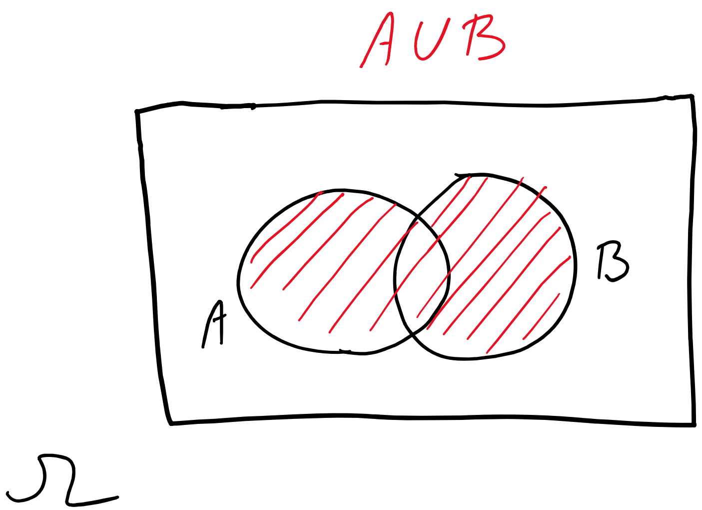
$A \subset B$

* مجموعه‌ای که هیچ عنصری نداشته باشد را مجموعه تهی می‌گوییم.

ϕ یا $\{\}$

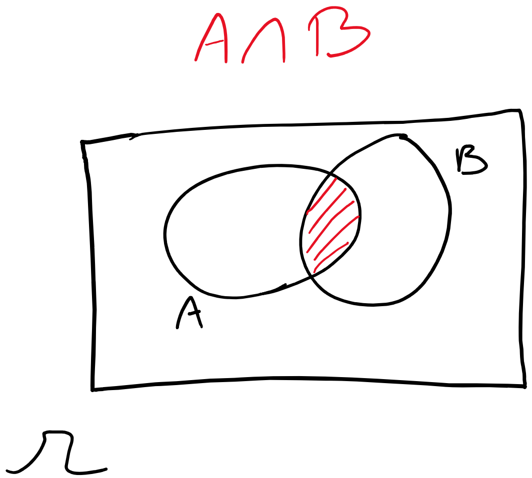
* مفهوم اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ یا $A+B$ نمایش می‌دهیم که نشان دهنده‌ی یک مجموعه است که اعضای آن یا عضو A هستند یا عضو B (یا هر دو)



* مفهوم اشتراک دو مجموعه

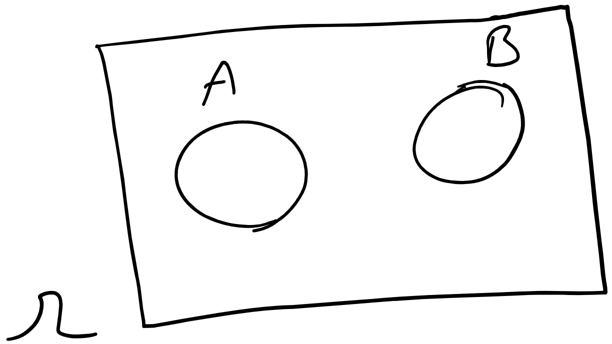
اشتراک دو مجموعه‌ی A, B را با $A \cap B$ یا AB نمایش می‌دهیم که نشان دهنده‌ی مجموعه‌ای است که اعضای آن هم عضو A هستند هم عضو B



* دو مجموعه A و B را جدا از هم می‌گوییم، اگر اشتراک آنها هیچ عضوی نداشته باشد.

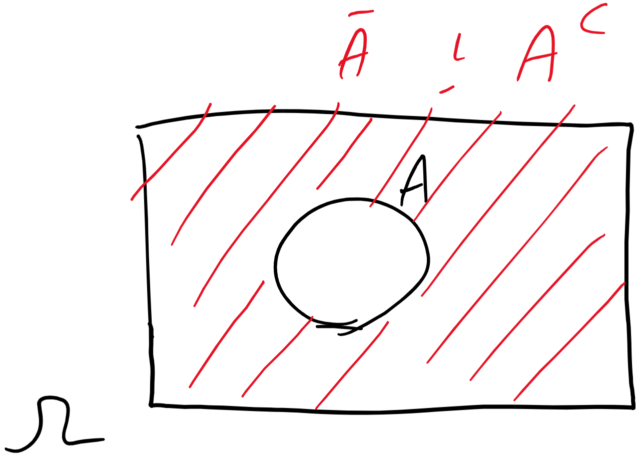
$$A \cap B = \phi$$

Disjoint



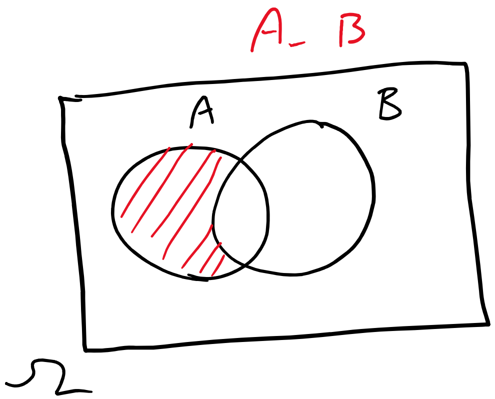
* مفهوم مکمل یک مجموعه

مجموعه‌ی مکمل A را با A^c یا $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم که نشان دهنده‌ی اعضایی از مجموعه‌ی Ω است که عضو A نیستند.



* مفهوم تفاضل دو مجموعه

تفاضل دو مجموعه A و B را با $A - B$ نمایش می‌دهیم که نشان دهنده‌ی مجموعه‌ای از اعضای A است که عضو B نیستند



$$A - B = A \cap \bar{B}$$

یادآوری برخی قوانین در مجموعه ها

1) $A \cup \varphi = A \quad , \quad A \cup \Omega = \Omega$

2) $A \cap \varphi = \varphi \quad , \quad A \cap \Omega = A$

3) $A \subset B \quad , \quad B \subset A \implies A = B$

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ قوانین شرکت پذیری

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

قوانین توزیع پذیری

5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

قوانین دمورگان ✓

6) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

قوانین جابه جایی

7) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

* مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، ... ، A_n را دو به دو هم فرسا (Exhaustive) می‌گوییم اگر اجتماع آنها برابر Ω باشد یعنی

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

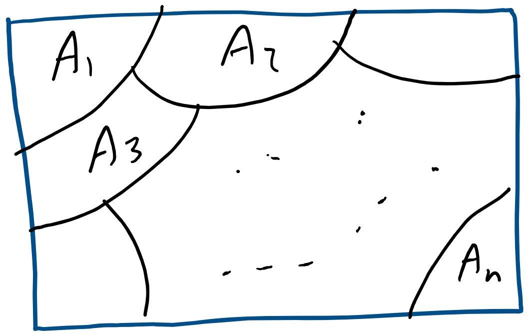
یا $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ یا $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

* اگر مجموعه‌های A_1 ، ... ، A_n دو به دو هم فرسا و دو به دو جدا از هم باشند، می‌گوییم که A_1 ، A_2 ، ... ، A_n یک افراز روی مجموعه‌ی Ω هستند.

1) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

$\Longrightarrow \Omega$ افرازی $\{A_1, \dots, A_n\}$

2) $\forall i \neq j \; ; \quad A_i \cap A_j = \varphi$



Ω

* حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B، مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های (a_i, b_j) است به طوری که $a_i \in A$ و $b_j \in B$

$$A \times B = \{ (a_i, b_j) \mid a_i \in A , b_j \in B \}$$

بدین ترتیب واضح است که ضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابجایی ندارد (ترتیب در این ضرب مهم است)

$$|A| = K , \quad |B| = M \quad \Longrightarrow \quad |A \times B| = K \times M$$

مثال: دو مجموعه‌ی A , B را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$A = \{H, T\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را به دست بیاورید.

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A, b_j \in B\}$$

$$= \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

از نظر احتمالات، می‌توان $A \times B$ را در مثال قبل، معادل فضای نمونه آزمایش پرتاب سکه و پرتاب تاس در نظر گرفت (اول پرتاب سکه، بعد پرتاب تاس)

با این یادآوری از نظریه مجموعه‌ها، به بحث قبلی برمی‌گردیم. هدف این است که در ارتباط با یک آزمایش تصادفی، بتوانیم به هر پیشامد مورد نظر یک عدد بین صفر و یک، به عنوان احتمال نسبت بدهیم. در این ارتباط فضای احتمال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فضای احتمال از عناصر زیر تشکیل می‌شود:

1- فضای نمونه یا Ω (به عنوان مجموعه‌ای از تمامی نتایج ممکن آزمایش تصادفی)

2- یک زیرمجموعه از Ω به عنوان پیشامد مورد نظر که آن را با E نمایش می‌دهیم

3- یک عدد (یک تابع) به عنوان احتمال پیشامد مورد نظر که با P یا $P(E)$ نمایش می‌دهیم

فضای احتمال $\longrightarrow$ (Ω, E, P) یا $(\Omega, E, P(E))$

در این فضای احتمال با مفاهیم فضای نمونه (S) و پیشامد (E) (پیشامد مورد نظر)

آشنا شده ایم. در این بخش می خواهیم با مفهوم احتمال (P) آشنا شویم.

$$P \equiv P(E) \equiv P_r\{E\}$$

برای این منظور ابتدا دو پیشامد غیرممکن و حتمی را معرفی می کنیم.

* پیشامد غیرممکن، پیشامدی است که احتمال آن برابر صفر است.

به عنوان مثال مجموعه $\{\ \}$ یک پیشامد غیرممکن است.

* پیشامد حتمی پیشامدی است که احتمال آن برابر 1 است.

به عنوان مثال Ω یک پیشامد حتمی است.

$$P(\phi) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

* منظور از رخ دادن پیشامد، این است که نتیجه‌ی آزمایش تصادفی، یکی از اعضای مجموعه‌ی E باشد.

$\Leftarrow$ فضای نمونه Ω، یک پیشامد حتمی است و همیشه رخ می‌دهد $\Leftarrow$ $P(\Omega) = 1$